Intégrale de DIRICHLET

ÉNONCÉ :

Intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

DÉVELOPPEMENT :

LEMME :
On considère l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccc} F & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^{+\infty} f(x,t)dt \end{array}$$

où f est définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & e^{-xt}\frac{sin(t)}{t} \end{array}$$

Alors, pour $x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - arctan(x)$

Démonstration. • On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & e^{-xt}\frac{sin(t)}{t} \end{array}$$

Pour $x > 0$, la fonction $f(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle se prolonge par continuité en 0 par $f(x,0) = 1$ et que, lorsque t tend vers l'infini, $f(x,t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

De plus, l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccc} F & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^{+\infty} f(x,t)dt \end{array}$$

est définie en 0.
En effet, pour $X \geq 1$, on a :

$$\int_1^X \frac{sin(t)}{t}dt = \left[\frac{-cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2}dt$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque c'est un $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. L'intégrale entre 1 et X admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$. Donc F est bien définie en 0.

• <u>Voyons que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$</u> :
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. De plus, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{xt}sin(t)$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$, on a :

$$\forall t > 0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|sin(t)| \leq e^{-at}$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cette domination nous assure que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}sin(t)dt \\ &= -Im\left(\int_0^{\infty} e^{-(x-i)t}dt\right) \\ &= Im\left(\frac{1}{i-x}\right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = C - artctan(x)$. Or :

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où $C = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - artcan(x)$$

- Voyons que F est continue en 0 :
  On a, pour $x \geq 0$:

$$F(x) = \underbrace{\int_0^1 f(x,t)dt}_{F_1(x)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x,t)dt}_{F_2(x)}$$

  F_1 est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. En effet, on a la domination suivante :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|sin(t)| \leq 1$$

  Pour F_2, remarquons qu'il s'agit de la partie imaginaire de

$$G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t}dt$$

  On a, pour $X \geq 1$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[\frac{1}{i-x}\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^X + \frac{1}{i-x}\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t}dt \\ &\underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}dt \end{aligned}$$

  car $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

  Or la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}dt$ est continue car $(x,t) \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[$ et on dispose de la domination par une fonction intégrable $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. G est donc continue sur $\mathbb{R}_+$, donc F_2 l'est aussi.
  Finalement, F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\square$

CONCLUSION : On a donc, par continuité de F sur $\mathbb{R}_+$ et donc en 0 :

$$\begin{aligned} F(0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - arctan(x)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Remarques :

- La fonction sinus cardinal n'est pas LEBESGUE-intégrable (comparaison série-intégrale).
- On ne peut pas faire de même avec $\int_0^{+\infty} \frac{cos(t)}{t}dt$ (problème en 0).
- Il faut connaître d'autres moyens de calculer cette intégrale (Théorème des résidus, FOURIER-PLANCHEREL, équation différentielle).